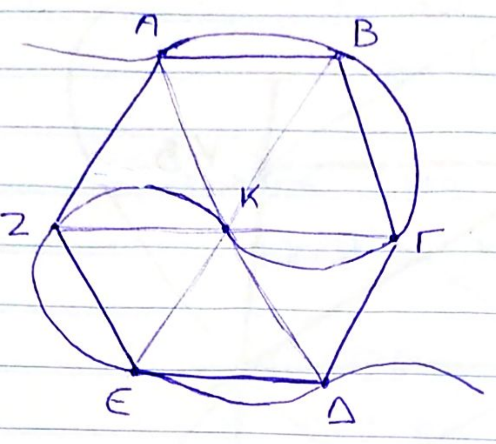
12ο μάθημα
25/5/20

ΠΑΛΙΟ ΘΕΜΑ:

Έστω c μια λεία κυβική καμπύλη που διέρχεται από τις 6 κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου κ' από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου. Κ. Δ.ο. το Κ είναι πάντα σημείο καμπής της c

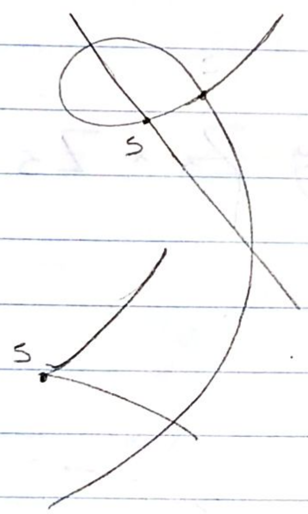


ΛΥΣΗ: $V(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

ομάδα

Σύμφωνα με το Bezout:

$$A+B+\Gamma+\Delta+E+Z=0$$



$(V(F)\setminus\{s\}, +)$

Έστω $(c,+)$ με πράξη την πρόσθεση με τον κανόνα χορδής εφαπτομένης

Γνωρίζ. ότι $A+B+\Gamma+\Delta+E+Z=0$

Είναι κανονικό εξάγωνο, άρα είναι ευθεία Α, Δ στην ίδια ευθεία

$$A+K+\Delta=0$$

Άρα:

$$A+B+\Gamma+\Delta+E+Z=0$$

$$A+K+\Delta=0$$

$$B+K+E=0$$

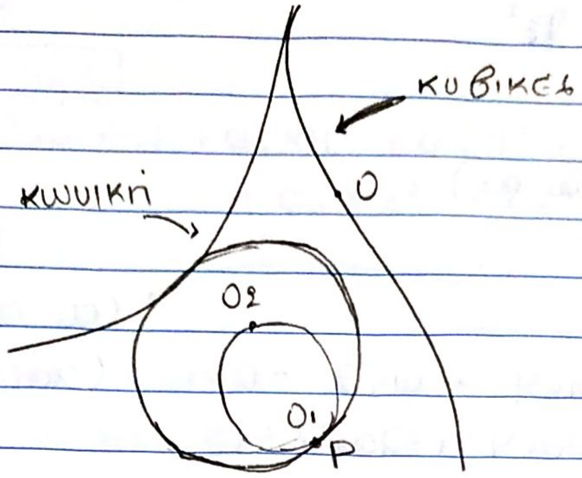
$$\Gamma+K+Z=0$$

$$3K+(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z)=0$$

$$3K+0=0$$

$$3K=0$$

Κ σημείο καμπής



$O(P) \in \{1, 2, 3, 6\}$

$O_3 \quad O_1 \quad O_2, O_3$

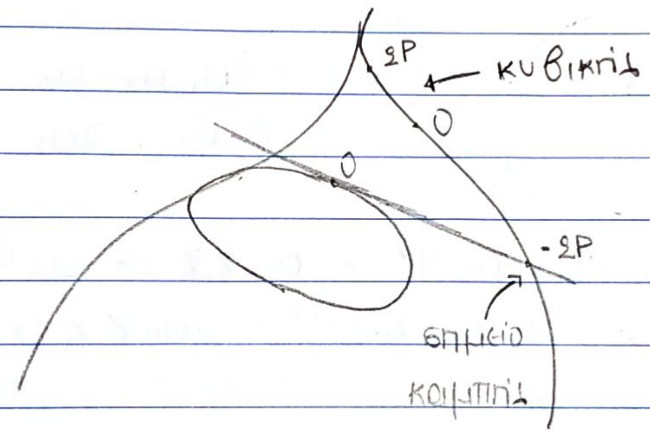
$1 \quad 3 \quad 8 \quad 24$

σημείο καμπής

$$P+P+P+P+P+P = O$$

$$6P = O \Rightarrow 3\cdot(-2P) = O$$

Ποιο είναι αυτό το $-2P$?



$$P_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} /\sim$$

$$(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3)$$

όταν $\exists \lambda \neq 0 \quad \lambda \in \mathbb{C}$

$$b_1 = \lambda a_1$$

$$b_2 = \lambda a_2$$

$$b_3 = \lambda a_3$$

Όταν είμαι στον n-διάστατο, δηλ.

$$P_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,0,0)\} /\sim$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \sim (b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$$

$P_{\mathbb{C}}^2$

(a_1, a_2, a_3)

$P_{\mathbb{C}}^2$

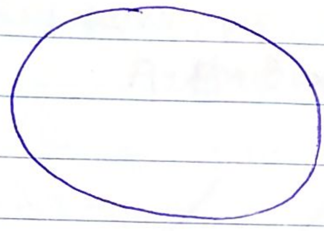
(a_1, a_2, a_3)

$(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

$a_1 X + a_2 Y + a_3 Z = 0$

$\lambda a_1 X + \lambda a_2 Y + \lambda a_3 Z = 0$

$P_{\mathbb{C}}^2$



$P^5 = \mathbb{C}^6 \setminus \{(0,0,0,0,0,0)\}$

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$

$(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_6)$

$a_1 X^2 + a_2 XY + a_3 Y^2 + a_4 XZ + a_5 YZ + a_6 Z^2 = 0$

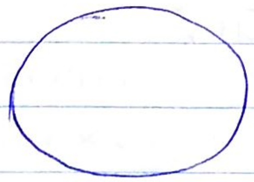
$\lambda a_1 X^2 + \lambda a_2 XY + \lambda a_3 Y^2 + \lambda a_4 XZ + \lambda a_5 YZ + \lambda a_6 Z^2 = 0$

Ποιες οι 2βάθμιες που διέρχονται από το $(0,1,1)$?

$\downarrow$

$\cancel{a_1 \cdot 0} + \cancel{a_2 \cdot 0} + a_3 \cdot 1 + \cancel{a_4 \cdot 0} + a_5 \cdot 1 + a_6 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow a_3 + a_5 + a_6 = 0$



$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ (a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6) \end{array}$$

$\boxed{x_3 + x_5 + x_6 = 0}$

Από το $(1,2,3)$:

$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 2^2 + a_4 \cdot 3 + a_5 \cdot 6 + a_6 \cdot 3^2 = 0$

$P_{\mathbb{C}}^2$ $P_{\mathbb{C}}^9$ $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$

$(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_{10})$

$\boxed{\text{Κυβικές}}$

$$a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 x y^2 + a_4 y^3 + a_5 x^2 z + a_6 x y z + a_7 y^2 z + a_8 x z^2 + a_9 y z^2 + a_{10} z^3 = 0$$

9διάστατος χώρος

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ:

Καμπύλες βαθμού d

Μονώνυμα βαθμού d σε μεταβλητές x, y, z

Βαθμού $1 \to 3$ μονώνυμα

$2 \to 6$ μονώνυμα

$3 \to 10$ μονώνυμα

$\vdots$

$$d \to \binom{d+2}{2} = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$$

$x^a y^b z^c$ βαθμού d, $a + b + c = d$

$$(\underbrace{1, 1, 1}_{a}, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{b}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{c})$$

$d+2$ πλήθος αριθμών

κ. σε κάθε $d+2$ πλ. αριθμών μπορώ να αντιστοιχίσω ένα μονώνυμο

Π.χ. $(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \longrightarrow x^3 y z^4$

$(1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0) \longrightarrow x^5 y^3$

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε όλες τις κωνικές που διέρχονται από τα $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$

<u>ΛΥΣΗ</u>:

$a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 xz + a_5 yz + a_6 z^2 = 0$

$(1,0,0) \to \boxed{a_1 = 0}$

$(0,1,0) \to \boxed{a_3 = 0}$

$(0,0,1) \to \boxed{a_6 = 0}$

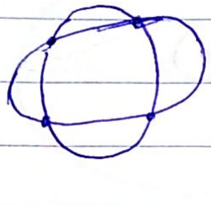
$(1,1,1) \to \cancel{a_1} + a_2 + \cancel{a_3} + a_4 + a_5 + \cancel{a_6} = 0$

$\Rightarrow \boxed{a_2 + a_4 + a_5 = 0} \to a_5 = -a_2 - a_4$

Άρα $a_2 xy + a_4 xz - a_2 yz - a_4 yz = 0$

$\Rightarrow a_2(xy - yz) + a_4(xz - yz) = 0$

[μονοδιάστατη οικογένεια]



(+) Εφάπτονται στην ευθεία $2x + y - z = 0$

Τι κάνω? Λύνω το σύστημα:

$a_2(xy - y(2x+y)) + a_4(x(2x+y) - y(2x+y)) = 0$

$\Rightarrow a_2(xy - 2xy - y^2) + a_4(2x^2 + xy - 2xy - y^2) = 0$

$\Rightarrow -a_2 xy - a_2 y^2 + 2a_4 x^2 - a_4 xy - a_4 y^2 = 0$

$\Rightarrow 2a_4 x^2 - (a_2 + a_4) xy + (-a_2 - a_4) y^2 = 0$

Θέλω διπλή ρίζα, δηλ.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (a_2 + a_4)^2 + 8a_4(a_2 + a_4) = 0$

ξέρουμε ότι εκεί εφάπτεται άρα θέλω διπλό σημείο

$\Leftrightarrow (a_2 + a_4)(a_2 + a_4 + 8a_4) = 0$

$\Leftrightarrow a_2 = -a_4$ ή $a_2 = -9a_4$

άρα $a_2(xy - yz) + a_4(xz - yz) = 0$

αν $a_2 = -a_4$: $-a_4(xy - yz) + a_4(xz - yz) = 0$

$\Rightarrow -a_4(-xy + \cancel{yz} + xz - \cancel{yz}) = 0$

$\Rightarrow \boxed{x(z - y) = 0}$

άρα $-9a_4(xy - yz) + a_4(xz - yz) = 0$

$\Rightarrow \boxed{-9xy + 8yz + xz = 0}$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν δύο καμπύλες βαθμού n τέμνονται σε n^2 διαφορετικά σημεία κ. ακριβώς mn από αυτά βρίσκονται πάνω στη μία <u>ανάγωγη</u> καμπύλη βαθμού m, τότε τα υπόλοιπα $n(n-m)$ βρίσκονται πάνω σε μία καμπύλη βαθμού $n-m$.

$V(F_1)$ $V(F_2)$ F_1, F_2 βαθμού n

$V(sF_1+tF_2)$ n^2 <u>διαφορετικά</u> σημεία

$(s,t)\neq(0,0)$ mn από αυτά ανήκουν

sF_1+tF_2 $V(G)$ βαθμού m

βαθμού n ανάγωγη

$F_1(p)=0$

$F_2(p)=0$

$V(sF_1+tF_2)$ βαθμού n κ. διέρχεται από τα n^2 σημεία

Διαλέγω $Q\in V(G)$ κ. είναι διαφορετικό από τα mn στοιχεία

$s=F_2(Q)$, $t=-F_1(Q)$

$F_2(Q)F_1(Q)-F_1(Q)F_2(Q)=0$

άρα $V(F_2(Q)F_1-F_1(Q)F_2)$

$mn+1$ κοινά σημεία

$V(G)$ $\xrightarrow{\text{Bezout}}$ Οι δύο καμπύλες έχουν κοινή συνιστώσα. Όμως G ανάγωγη άρα έχει μόνο μία συνιστώσα

$F_2(Q)F_1-F_1(Q)F_2$ ← βαθμού n

$=G\cdot H$

m $n-m$

$$V(F_2(Q)F_1 - F_1(Q)F_2) = V(GH)$$
$$= V(G) \cup V(H)$$

Άρα τα υπόλοιπα $n(n-m)$ σημεία ανήκουν σε μία καμπύλη βαθμού $n-m$